# Exercice 3 — 4 points

## Partie A

1. $-x^2+7x+8=0$ admet $-1$ comme solution évidente. L'autre solution de l'équation du second degré est donc 8.

   Le trinôme est négatif (du signe du coefficient de $x^2$), sauf entre les racines, d'où le tableau de signes de $x \longmapsto -x^2+7x+8$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $-x^2+7x+8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2+7x+8 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ est l'intervalle $[-1\,;\,8]$

2. Pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,8]$, $-x^2+7x+8 \geqslant 0$. D'où en ajoutant 1 à chaque membre $-x^2+7x+9 \geqslant 1$.

   Comme la fonction logarithme népérien est une fonction croissante on a pour tout $x$ appartenant à $]0\,;\,8]$, $\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant \ln(1)$. C'est à dire $\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant 0$.

   Pour tout $x$ appartenant à $]0\,;\,8]$, $x>0$ et $10\ln\left(-x^2+7x+9\right) \geqslant 0$, donc $f(x) = \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x} \geqslant 0$.

3. Sur l'intervalle $[0\,;\,8]$ la courbe représentative est au dessus de l'axe des abscisses.

## Partie B

1. Pour $x \in\ ]0\,;\,8]$, $\text{M}\left(x, \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}\right)$ et donc $\text{N}(x,0)$ et $\text{P}\left(0, \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}\right)$.

2. Comme pour $x \in\ ]0\,;\,8]$, l'abscisse de N est positive et l'ordonnée de P est positive.

   On peut écrire ON$=x$ et OP$=\dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x}$.

   L'aire de ONMP vaut ON $\times$ OP donc :

   $\forall x \in\ ]0\,;\,8] \quad \mathscr{A}(x) = x \times \dfrac{10\ln\left(-x^2+7x+9\right)}{x} = 10\ln\left(-x^2+7x+9\right)$

3. Sur $]0\,;\,8[$, $-x^2+7x+9>0$ donc $\mathscr{A}$ est une fonction dérivable de la variable $x$ sur $]0\,;\,8[$ comme composée de fonction définies et dérivables.

   $\forall x \in\ ]0\,;\,8[$, $\mathscr{A}'(x) = 10 \times \dfrac{-2x+7}{-x^2+7x+9}$.

   S'il existe $x \in\ ]0\,;\,8[$ telle que $\mathscr{A}(x)$ soit maximale, il faut que $\mathscr{A}'(x)=0$

   Pour $x \in\ ]0\,;\,8[$, $-x^2+7x+9>0$, $\mathscr{A}'(x)$ est donc du signe de $-2x+7$.

   $$\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 \iff -2x+7 \geqslant 0$$
   $$\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{7}{2}$$

   $\mathscr{A}$ est croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{7}{2}\,;\,8\right[$.

   La dérivée s'annule en $\dfrac{7}{2}$, en étant positive avant puis négative après, donc la fonction $\mathscr{A}$ a un maximum sur $]0\,;\,8[$, :

   $\mathscr{A}\left(\dfrac{7}{2}\right) = 10\ln(17)+10\ln(5)-20\ln(2) \approx 30{,}56$

## Partie C

**1.**

```
from math import *

def A(x):
        return 10*log(-1 * x**2 + 7*x + 9)

def pluspetitevaleur(k):
        x = 3.5
        while A(x) > k:
                x = x + 0.1
        return x
```

**2.**
```
>>>pluspetitevaleur(30)
4.599999999999998
```

**3.** Lorsque $k = 35$, la condition `A(x) > 35` n'est pas vérifiée donc le contenu de la boucle n'est pas exécuté. L'appel `pluspetitevaleur(35)` renvoie `3.5`.